Aula 47

Eq. Diferenciais Parciais e Séries de Fourier

Equação de Laplace (Elíptica)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{Sol:} u(x,y)$$

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \qquad \text{Sol:} u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Equação de Fourier do Calor (Parabólica)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{Sol:} u(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

$$\text{Sol:} u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$

Equação de D'Alembert das Ondas (Hiperbólica)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{Sol:} u(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

$$\text{Sol:} u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$

Problema de Valor Inicial e Fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \\ u(0,t) = T_0(t), \quad u(L,t) = T_L(t) \qquad t > 0 \end{cases}$$

Condições de Fronteira Homogéneas: $T_0(t) = T_L(t) = 0.$

Método de Separação de Variáveis

Procurar soluções não nulas da forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

para a equação e condições de fronteira homogéneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{cases}$$

Problema de Funções e Valores Próprios

Procurar soluções não nulas de

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda\, X(x) \\ \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$